Лекция 9

Однократный и многократный методы. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Практическая оценка погрешности. Квадратурные формулы Чебышева и Гаусса. Сравнительная характеристика методов..

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

1. Постановка задачи

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и известна ее первообразная F(x), то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

где .

Но часто возникают ситуации, когда вычислить интеграл можно только с помощью численных методов:

1) F(x) не выражается через элементарные функции.
;
2) F(x) существует и выражается через элементарные функции, но ее сложно найти
;
3) Найдена F(x), но сложно вычислить ее значение;
4) f(x) задана таблично или графиком.

Итак, как вычислить .

Обычный прием состоит в том, что данную функцию f(x) на рассматриваемом отрезке [a,b] заменяют интерполирующей функцией $P_n(x)$ простого вида, а затем приближенно полагают:

.

Функция $P_n(x)$ должна быть такова, чтобы интеграл вычислялся непосредственно.

Можно использовать интерполяционный многочлен $P_n(x)$ различной степени n, n = 0, 1, 2, ...

2. Формулы прямоугольников

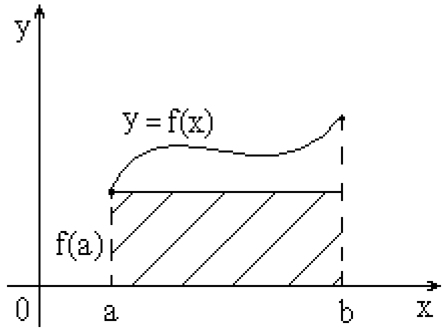
При n=0 ,

Для построения $P_0(x)$ требуется одна точка $(x_0, f(x_0))$.

Формула левых прямоугольников:

(a, f(a))

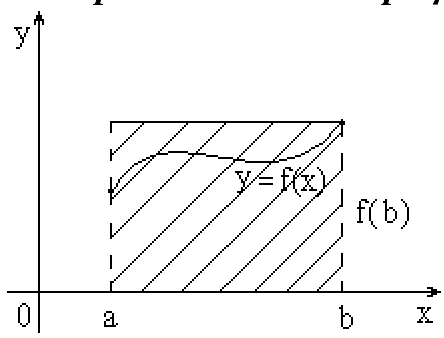
Геометрическая иллюстрация



Формула правых прямоугольников:

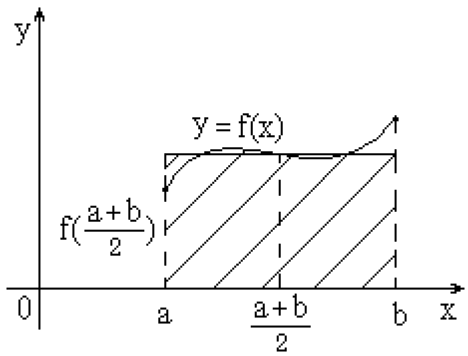
(b, f(b))

Геометрическая иллюстрация



Формула центральных прямоугольников:

Геометрическая иллюстрация



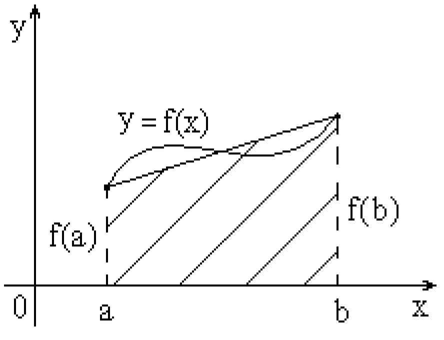
3. Формула трапеций

При n=1 ,

Для построения $P_1(x)$ требуется две точки:

x	y
$x_0=a$	$y_0=f(a)$
$x_1=b$	$y_1=f(b)$

Геометрическая иллюстрация



4. Формула Симпсона

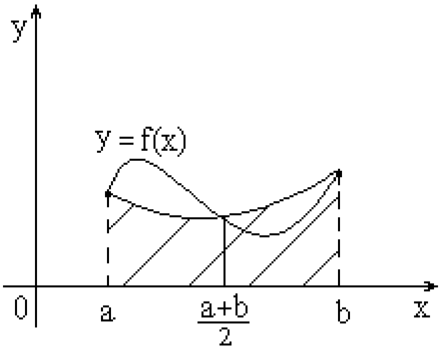
При n=2 ,

Для построения $P_2(x)$ требуется три точки:

x	y
$x_0=a$	$y_0=f(a)$

$x_2=b$	$y_2=f(b)$

Геометрическая иллюстрация



5. Обобщенные формулы

На практике обычно пользуются обобщенными формулами, т.к. [a,b] может быть большим и, следовательно, большой и погрешность вычисления интеграла по формулам прямоугольников, трапеции и Симпсона.

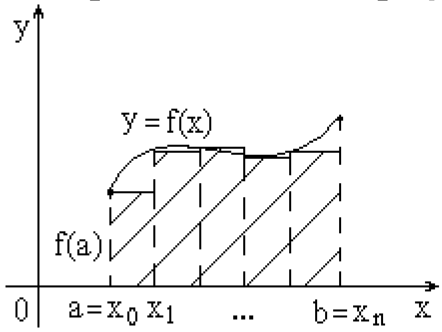
Как же добиться повышения точности вычисления?

[a,b] разбивают на n равных частей точками $a=x_0<x_1< \ldots < x_n=b$, и на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ применяется конкретный метод прямоугольников, трапеции или Симпсона, результаты суммируются, пользуясь условием аддитивности определения интеграла.

Величина - шаг интегрирования, $x_i=x_0+ih$, где .

Обобщенная формула левых прямоугольников

Геометрическая иллюстрация

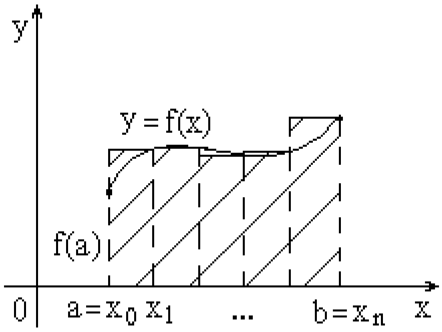


Введем обозначение :

(13.1)

Обобщенная формула правых прямоугольников

Геометрическая иллюстрация

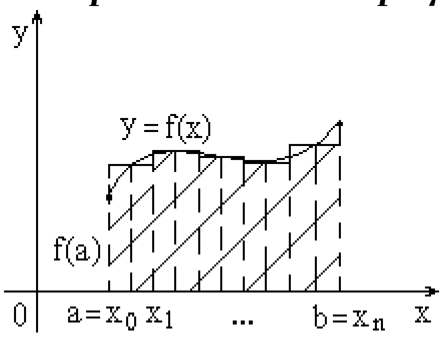


Введем обозначение :

(13.2)

Обобщенная формула центральных прямоугольников

Геометрическая иллюстрация

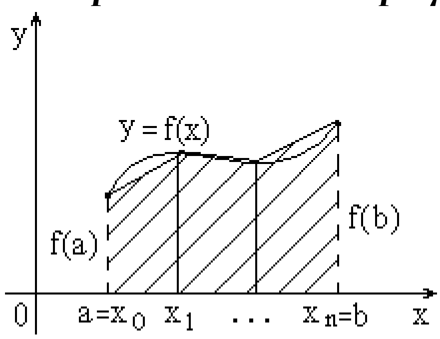


Введем обозначение :

(13.3)

Обобщенная формула трапеции

Геометрическая иллюстрация



(13.4)

Обобщенная формула Симпсона

(13.5)

6. Оценка погрешности

Если подинтегральная функция f имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную $f\,'$, то оценка погрешностей формул (13.1) и (13.2) дается неравенством

$$|J - J_n| \le M_1 \cdot \frac{(b-a)^2}{2n},$$

где $M_1 = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

Если подинтегральная функция f имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную вторую производную $f\,''$, то оценка погрешностей формулы (13.3) дается неравенством

$$|J - J_n| \le M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2},$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$.

Если подинтегральная функция f имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную вторую производную $f\,''$, то оценка погрешностей формулы (4.4) дается неравенством

$$|J - J_n| \le M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$.

Если подинтегральная функция f имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную четвертую производную f^{IV}, то оценка погрешностей формулы (4.5) дается неравенством

$$|J - J_n| \le M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4},$$

где $M_4 = \max\limits_{[a,b]} |f^{IV}(x)|$.

Эмпирический критерий оценки точности вычисления интеграла

На практике широко применяется следующий прием, пригодный для каждого из рассматриваемых методов. Искомый интеграл вычисляется дважды: при делении отрезка [a,b] на n частей и на 2n частей. Полученные интегралы J_n J_{2n} сравниваются, и совпадающие первые десятичные знаки считаются верными.

7. Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте постановку задачи вычисления значения определенного интеграла и ее геометрический смысл.

2. Сформулируйте общие подходы к решению задачи интегрирования численными методами.

3. Вычислите приближенно интеграл $\int_0^2 x^2 dx$ для n=4 по формулам:

   a) правых прямоугольников,
   b) левых прямоугольников,
   c) центральных прямоугольников,
   d) трапеций,
   e) Симпсона.

   Вычислив точное значение интеграла по формуле Ньютона-Лейбница, оцените абсолютную и относительные погрешности полученных каждым методом приближенных значений.

4. Убедитесь в том, что формула центральных прямоугольников точна для многочленов $1, t$, а формула Симпсона – для многочленов $1, t, t^2, t^3$.

5. Оцените теоретически значение шага интегрирования *h* для приближенного вычисления интеграла $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ по формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

6. Оцените минимальное число разбиений отрезка интегрирования *n* для приближенного вычисления интеграла $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ по формуле трапеций, обеспечивающее точность $\varepsilon = 10^{-4}$.